neetubot 「m 次元ユークリッド空間内での n 次元単体の五心などの導出 ～linear algebra derive n-simplex centers from m-Euclidean space～」

Abstract 点・線分・三角形・四面体 $\cdots$ など各次元において最も単純な図形を n 次元単体と呼ぶ。m 次元空間内の n 次元単体は、一般的に互いに独立な n 本の m 次元基底ベクトルを列挙した $m \times n$ 行列で表せる。このことを用いて、三角形の場合と同様に定義できる n 次元単体の五心などの図形的性質を導出する過程から、$m \times n$ 行列を用いた線型代数計算の意味について幾何学的に理解できると考えた。

Keywords m 次元ユークリッド空間・n 次元単体の五心・超立体解析幾何学・線型代数・余因子総和

1 はじめに

宇宙上の万物は、横・縦・奥行などで表される 3 次元空間内に存在し、時間軸を入れても人間が認識できるのは 4 次元時空間までと思われている。しかし、最近のミクロな物理学などでは 5 次元以上が考えられており、これからは数学においても高次元空間での図形や計算が重要となるであろう。

また、数学の分野において、m 個の数値データ列を n 通り列挙したような $m \times n$ 行列について調べる線型代数学は応用性に優れるが、図形について調べる幾何学に比べて直感的でなく難しいとされる。そこで、$m \times n$ 行列で表すことができる「m 次元空間内の n 次元単体」という図形に着目し、行列計算をこの高次元の図形の計算に帰着することで、線型代数学を幾何学として分かりやすく理解できると感じる。

既存研究としては、デカルトに代表される解析幾何学や、物理学の n 次元ベクトル解析、統計学の多変量解析などの分野がある。しかし、n 次元単体の五心などを線型代数で解く試みは見つからなかったので、本論文にまとめる。

2 m 次元ユークリッド幾何学

ここでは、一般的な内積などが定義された m 次元ユークリッド空間を U^m と書き、その中において標準的な演算に従いベクトルや行列を計算する。

2.1 n 次元単体について

n 次元単体 (n-Simplex) とは、$(n+1)$ 個のアフィン独立な点によって作られる図形のことである。例えば、0 次元単体は一点、1 次元単体は線分、2 次元単体は三角形であり、n 次元単体は下図のように考えると想像しやすい。

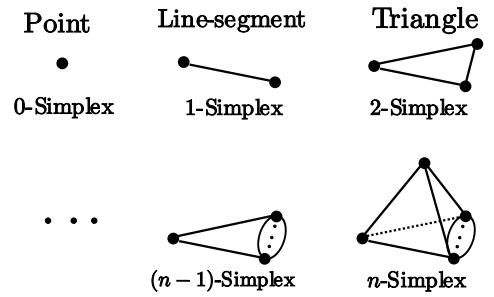

図 0 次元単体（一点）から n 次元単体までの概形図

2.2 方向表記と位置表記

下図のように m 次元ユークリッド空間内にある n 次元単体の内部点を表す表記として、n 次元単体のある頂点から出る互いに線形独立な n 本の有向辺の方向ベクトル $(\boldsymbol{l}_1, \cdots, \boldsymbol{l}_n)$ を各列成分に持つ $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{L}$ を用いる方向表記 (Simplex Direction Formula) と、n 次元単体の $(n+1)$ 個の頂点への位置ベクトル $(\boldsymbol{p}_0, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ を各列成分に持つ $m \times (n+1)$ 行列 $\boldsymbol{P}$ を用いる位置表記 (Simplex Position Formula) がある。

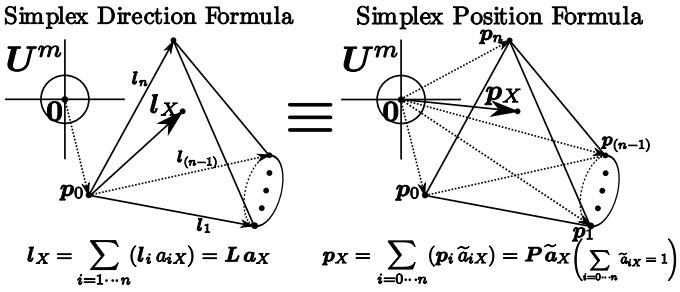

図 n 次元単体における方向表記（左図）と位置表記（右図）

上図のように、単体の内部点への位置ベクトル $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{l}$ が、単体によって定まる位置行列 $\boldsymbol{P}$ と $(n+1)$ 個の係数を列にした位置座標ベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}$（添え字が 0 から始まるベクトルや行列を表す文字の頭には ～ を付け区別する）によって $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{a}}$ と表されるとき、全ての成分が 1 である列ベクトルを $\boldsymbol{1}$ とすれば $\boldsymbol{1}^T\tilde{\boldsymbol{a}} = 1$ が成り立ち、このとき $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{L}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と表されるなら $a_i = \tilde{a}_i$ である。

2.3 n 次元単体の超体積

一般的に $\boldsymbol{L}$ で方向表記される n 次元単体の超体積は $\frac{\sqrt{\det[\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}]}}{n!}$ となることが知られている。このとき、$\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{1}^T = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{L}]$ となることから、正方行列 $\boldsymbol{X}$ の余因子行列を $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{X}]$ で表せば、単体超体積について次式が成り立つ。

$$\frac{\sqrt{\det[\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}]}}{n!} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{C}\left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{1}}}{n!} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{C}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\boldsymbol{1}}}{n!}$$

2.4 n 次元単体の超表面積

前節をふまえて、正方行列 $\boldsymbol{X}$ の j 行と i 列を除く小行列の余因子を全て足し $(-1)^{(j+i)}$ を掛けた値を j 行 i 列成分に

持つ余因子総和行列 $\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{X}]$（$\boldsymbol{X}$ と同じサイズとなる）というものを導入する。次式の $\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]$ は、n 次元単体の i 頂点（$i=0\cdots n$）を除く n 点で作られる $(n-1)$ 次元単体（i 対面）の超体積の自乗に比例する値を i 行 i 列成分に持つ。

$$\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{C}[\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}]\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{C}[\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}] \\ -\boldsymbol{C}[\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}]\boldsymbol{1} & \boldsymbol{C}[\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}] \end{pmatrix}$$

正方行列 $\boldsymbol{X}$ の対角成分以外を 0 にした対角行列を $\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{X}]$ で表せば、n 次元単体の超表面積は $\frac{\sqrt{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\Sigma}[\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]]\boldsymbol{1}}}{(n-1)!}$ と書ける。

3 n 次元単体の五心の導出

よく知られている三角形（2 次元単体）の五心（重心・垂心・内心・傍心・外心）などと同様のものが n 次元単体にも定義でき、位置は行列計算によって導出できる。

3.1 n 次元単体の重心

n 次元単体の各頂点から出るベクトルがつりあう（$\sum_{i=0}^{n}(\boldsymbol{p}_G-\boldsymbol{p}_i)=\boldsymbol{0}$）点を、$n$ 次元単体の重心 $\boldsymbol{p}_G=\frac{\boldsymbol{P1}}{n+1}$ とする。n 次元単体の重心は各頂点からの距離の自乗和が最小となる点でもある。

ちなみに、n 次元単体の重心を中心とし、その n 次元単体内部の全ての k 次元部分単体の重心で接するような超楕円体（三角形の場合はシュタイナー楕円と呼ばれる）を n 次元単体の重中 k 次元面接超楕円体と呼び、その n 本ある半径を表す行列を $\boldsymbol{R}_G=[\boldsymbol{r}_{1G},\cdots,\boldsymbol{r}_{nG}]$ とすれば、次式のような固有値分解などで解ける式になると予想する。

$$\frac{(n-k)}{(n+1)(k+1)}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{1}}\right)\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{R}_G\boldsymbol{R}_G^T$$

3.2 n 次元単体の i 垂線

n 次元単体の i 頂点から i 対面への垂線 $\boldsymbol{h}_i$ は次式で位置表記できる。なお、$\frac{\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i^T\boldsymbol{h}_i}$ を全て足すと零ベクトルとなる。

$$\boldsymbol{h}_i=\frac{\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\tilde{\boldsymbol{e}}_i}{\tilde{\boldsymbol{e}}_i^T\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\tilde{\boldsymbol{e}}_i}\quad\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\boldsymbol{h}_i}{\boldsymbol{h}_i^T\boldsymbol{h}_i}=\boldsymbol{0}\right)$$

3.3 n 次元単体の垂心

n 次元単体の i 垂線の $(n+1)$ 本全てが一点で交わるとき、その交点を n 次元単体の垂心 $\boldsymbol{p}_H$ とすれば次式のようになる。

$$i\neq j\neq k\neq i \text{ の全ての } i,j,k=0\cdots n \text{ について}$$

$$\nu_i=(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i)^T(\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{p}_i) \text{ となるとき、} \boldsymbol{p}_H=\frac{\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu_0}\\ \vdots \\ \frac{1}{\nu_n}\end{pmatrix}}{\boldsymbol{1}^T\begin{pmatrix}\frac{1}{\nu_0}\\ \vdots \\ \frac{1}{\nu_n}\end{pmatrix}}$$

この垂心が存在する場合、外心と重心を $(n+1):2$ に外分する点（オイラー線上）となることをふまえて、n 次元単体の外心 $\boldsymbol{p}_O$（後述）と重心 $\boldsymbol{p}_G$ を $(n+1):2$ に外分する常に存在する点を広義垂心 $\boldsymbol{p}_{H'}=\frac{n+1}{n-1}\boldsymbol{p}_G-\frac{2}{n-1}\boldsymbol{p}_O$ と呼ぶ。これらについては平石 [1] の研究が詳しい。

3.4 n 次元単体の内心・傍心

n 次元単体の各 i 対面からの距離の比がそれぞれ j_i となる点を分面心 $\boldsymbol{p}_J$ と呼び、対角行列 $\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{X}]$ の各成分を平方根した対角行列を $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}[\boldsymbol{X}]$ で表せば、次式で表せる。

$$\boldsymbol{p}_J=\frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\left[\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\right]\begin{pmatrix}j_0\\ \vdots \\ j_n\end{pmatrix}}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\left[\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\right]\begin{pmatrix}j_0\\ \vdots \\ j_n\end{pmatrix}}$$

このとき、比 j_i が全て 1 の場合は n 次元単体の内心となり、比 j_i が一つだけ -1 で残りが 1 の場合は n 次元単体の傍心と言える。また、各 i 対面からの距離が等しいだけの点を広義傍心と呼べば、比 j_i が -1 か 1 であればよいので、内心・傍心・無限遠方の点も含め 2^n 個定義できることになる。

3.5 n 次元単体の k 次元面心

n 次元単体の $(n+1)$ 個の頂点のうち、$(k+1)$ 個選んで作られる k 次元部分単体の全てからの距離が等しくなる内部点を n 次元単体の k 次元面心と呼ぶ。$(n-1)$ 次元面心（内心）と 0 次元面心（外心）を除く、1 から $(n-2)$ 次元面心までには存在するための条件があり、式があまり綺麗にならない。

3.6 n 次元単体の外心

n 次元単体の各 i 頂点からの距離が全て等しくなる点を外心 $\boldsymbol{p}_O$ と呼べば、次式のように位置表記できる。

$$\boldsymbol{p}_O=\frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{C}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\boldsymbol{1}}+\frac{\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{C}[\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}]\boldsymbol{1}}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{p}_0^T\boldsymbol{p}_0}{2}\\ \vdots \\ \frac{\boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{p}_n}{2}\end{pmatrix}$$

4 おわりに

本論文では、n 次元単体の五心のベクトル解について記載したが、Kimberling [2] などに詳しい五心以外の Fermat-Torricelli 点や Lemoine-Symmedian 点、他にも、拙稿の neetubot [3] にある k 次元面均心（重心拡張）、複体外接超球（トレミーの定理拡張）、分点心（アポロニウス円拡張）、などをまとめて、今後は論文投稿サーバ arXiv などで公開したい。

参考資料

[1] 平石司『高次元単体の諸心』(2009-11-27, http://homepage2.nifty.com/hiraishi-tsukasa/Folder_SimplexesOfHighDimensions/SimplexesOfHighDimensions.htm)

[2] Clark Kimberling 『ENCYCLOPEDIA OF TRIANGLE CENTERS - ETC』(1999/2009, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html)

[3] 132 人目の素数さん・他 『m 次元ユークリッド幾何学スレまとめ@ウィキ』(2008-05-30/2009-12-10, http://www7.atwiki.jp/neetubot/)